

BLOQUE IV

OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

Los préstamos son operaciones financieras de amortización en las que el prestamista se compromete a entregar un determinado capital $(C_0, 0)$ al prestatario, y éste se compromete a devolverlo en un determinado período de tiempo $(0, n)$ y a pagar los intereses que se generen.

$\{(C_0, 0)\} \rightarrow$ Prestación

$\{(C_0 \text{ y los intereses})\} \rightarrow$ Contraprestación

Tipos de préstamos

1° Préstamos elementales o simples \rightarrow prestación y contraprestación formadas por un único capital.

a) Con intereses pagaderos

$$\begin{array}{c} C_0 \quad \quad \quad C_n = C_0(1+i)^n \\ \hline \end{array}$$

Prestación $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación $\{(C_n, n)\}$

b) Con intereses anticipados o prepagables

$$\begin{array}{c} C_0 = C_0^* - I^* \quad \quad \quad C_n = C_0^* \\ \hline C_0 = C_n(1-i)^n \end{array}$$

2° Préstamos de contraprestación múltiple \rightarrow El prestamista entrega $(C_0, 0)$ y recibe un conjunto de capitales $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \dots; (a_n, n)\}$. Cada uno de estos capitales recibe el nombre de término amortizativo.

Prestación $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \dots; (a_n, n)\}$

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_5 & \dots & a_n \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & 5 & \dots & n \end{array}$$

Son rentas cuyos términos se imponen con la finalidad de devolver un capital que se obtuvo en el origen de la operación financiera.

NOTA: SON SIEMPRE RENTAS POSPAGABLES Y TEMPORALES

$$(n) \quad A_s = \frac{(C_{s-1} - C_s)}{A_s} + \frac{(C_{s-1} \cdot i_s)}{I_s} \Rightarrow A_s = A_s + I_s$$

FÓRMULAS GÉNERICAS

$$C_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{h=1}^n A_h \rightarrow \text{Nominal del préstamo}$$

$$M_s^e = A_1 + A_2 + \dots + A_s = \sum_{h=1}^s A_h \rightarrow \text{Capital amortizado hasta el final del período } s, \text{ lo que se ha devuelto del nominal del préstamo. } \rightarrow \text{Operación cancelada o finalizada } M_s^e = C_0$$

$$C_s = A_{s+1} + A_{s+2} + \dots + A_n = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h} \rightarrow \text{Capital pendiente del período } s, \text{ lo que todavía se debe del nominal del préstamo}$$

$$\hookrightarrow C_s = C_{s-1}(1+i_s) - A_s^{(n)} \quad \text{ó tb} \quad C_s = C_0 - M_s^e$$

variación de la deuda

$$A_s = C_{s-1} - C_s$$

\rightarrow cuota de amortización del período s , lo que se devuelve del nominal del préstamo cada período. Si $i_s > 0$, regularidad en la amortización, por lo tanto si decreciente o permanece etc. respectivamente

$$c) \quad A_n = A_n(1+i_n) \rightarrow \text{Término amortizativo?}$$

$$a_s = A_s + I_s \rightarrow \text{Término amortizativo del período } s, \text{ lo que se paga al banco cada período}$$

$$I_s = C_{s-1} \cdot i_s \rightarrow \text{cuota de interés del período } s, \text{ los intereses que se suman en dicho período}$$

\rightarrow Estudios de amortización de préstamos con contraprestación múltiple

a) Evolución del capital vivo (capital pendiente de amortización)

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - A_s$$

b) Equivalencia fundamental de equivalencia financiera

- En el origen de la operación y con $i_h = i$

$$C_0 = \sum_{s=1}^n A_s (1+i)^{-s}$$

- En el final de la operación y con $i_h = i$

$$C_0(1+i)^n = \sum_{h=1}^n A_h (1+i)^{n-h}$$

c) Saldo financiero o deuda pendiente de amortizar

1. Método retrospectivo y con $i_h = i$

$$C_s = C_0(1+i)^s - \sum_{h=1}^s A_h(1+i)^{s-h}$$

2. Método prospectivo y con $i_h = i$:

$$C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h} (1+i)^{-h}$$

3. Método recurrente:

$$C_s = C_{s-1} (1+i) - a_s$$

MÉTODOS DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS

→ Método francés

Los términos amortizativos y el tipo de interés son de constante durante toda la vida del préstamo

a) La fundamental de equivalencia financiera

$$C_0 = a \cdot \overline{a}_{\overline{n}|i}$$

los términos
amortizativos

b) Ley de variación de las cuotas de amortización

$$A_s = A_1 (1+i)^{s-1}$$

$$A_{s+1} = A_s (1+i)$$

$$\begin{aligned} C_s &= C_{s-1} (1+i) - a \\ E_{s+1} &= C_s (1+i) - a \\ \frac{C_s - C_{s+1}}{A_{s+1}} &= \frac{(C_{s+1} - C_s)(1+i)}{A_s} \end{aligned}$$

c) Capital total amortizado

$$M_s^e = A_1 \cdot s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}$$

d) Capital vivo o saldo financiero

d.1) Método recurrente

$$C_s = C_{s-1} (1+i) - a$$

d.2) Método retrospectivo

$$C_s = C_0 (1+i)^s - a \cdot s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}$$

d.3) Método prospectivo

$$C_s = a \cdot \overline{a}_{\overline{n-s}|i}$$

En función del capital amortizado

$$C_s = C_0 - M_s^e \Rightarrow C_s = C_0 \left[1 - \frac{s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}}{\overline{a}_{\overline{n}|i}} \right]$$

Las cuotas de amortización siguen una progresión geométrica de razón $(1+i)$

$$A_s = A_1 (1+i)^{s-1}$$

$$M_n^e = C_0 = A_1 \cdot s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i} \Rightarrow A_1 = \frac{C_0}{s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}}$$

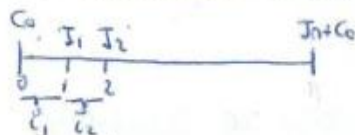
$$M_s^e = A_1 \cdot s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i} \Rightarrow M_s^e = C_0 \cdot \frac{s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}}{s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}}$$

$$C_s = A_{s+1} \cdot s \cdot \overline{a}_{\overline{s}|i}$$

→ Método Americano

• Método americano simple

A lo largo de los $n-1$ periodos iniciales, el prestatario o deudor abona únicamente los intereses correspondientes



Al final del último periodo, el prestatario, además de abonar los intereses correspondientes, devuelve íntegramente el principal del préstamo C_0 (todo el nominal).

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = 0 \rightarrow A_n = C_0$$

$$M_{n-1}^e = \sum_{h=1}^{n-1} A_h = 0 \rightarrow M_n^p = C_0$$

$$C_s = C_{s+1} = \dots = C_{n-1} = C_0$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = C_0 \rightarrow C_n = 0$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = C_0 \cdot i \rightarrow a_n = C_0 \cdot i + C_0$$

$$\Rightarrow A_n = A_n + I_n = C_0 + \overset{C_0}{\underset{\uparrow}{C_{n-1} \cdot i}} = C_0 + C_0 \cdot i$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{n-1} = C_0 \cdot i$$

• Método americano con fondo

combinación { - método americano simple
- operaciones de constitución

$$C_0 = \{ S_{\overline{n}|i} \} = F_n$$

→ tipo de interés pactado que usamos para pagar coincide con el i del préstamo.

$$a'_s = C_0 \cdot i + \{ \}$$

→ término que abona el prestatario

$$F_s = \{ S_{\overline{s}|i} \}$$

→ montante constituido al final del periodo s

$$C'_s = C_0 - F_s = C_0 - \{ S_{\overline{s}|i} \} \Rightarrow C_s = C_0 \left[1 - \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}} \right]$$

Capital pendiente de forma, o saldo nito

→ Método italiano o de cuotas constantes

Las cuotas de amortización o cuotas de capital son todas del mismo importe

$$M_n^e = \boxed{C_0 = n \cdot A} \rightarrow A = \frac{C_0}{n}$$

$$\boxed{M_s^e = s \cdot A} \rightarrow \text{capital total amortizado}$$

$$\boxed{C_s = (n-s)A} \rightarrow \text{capital vivo o saldo financiero} \quad C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - s \cdot A = n \cdot A - s \cdot A$$

$$C_s = A(n-s)$$

- Variación de los términos amortizativos

$$A = A \cdot (1+i) - a_s + a_{s+1} \Rightarrow$$

$$a_{s+1} = a_s - A \cdot i$$

$$\begin{aligned} C_s &= C_{s-1}(1+i) - a_s \\ C_{s+1} &= C_s(1+i) - a_{s+1} \\ (C_s - C_{s+1}) &= (C_{s-1} - C_s)(1+i) - (a_s - a_{s+1}) \\ A &= A(1+i) - a_s + a_{s+1} \end{aligned}$$

- Ecuación de equivalencia financiera

$$C_0 = A(a_1, d = A \cdot i) \overline{ni} = \left(a_1 + d \cdot n + \frac{d}{i}\right) a \overline{ni} - \frac{d \cdot n}{i}$$

$$d = -A \cdot i$$

$$a_1 = J_1 + A_1$$

$$\downarrow$$

$$C_0 \cdot i + \frac{C_0}{n}$$

$$a_s = J_s + A$$

$$\downarrow$$

$$C_{s-1} \cdot i \rightarrow \frac{C_0}{n}$$

Amortización con términos variables en progresión geométrica

cada término amortizativo es igual al anterior multiplicado por q (más)

a) Eq de equivalencia financiera

$$C_0 = A(a, q) \overline{ni} = a_1 \frac{1 - q^n(1+i)^n}{1+i-q}$$

b) Capital vivo o saldo financiera

b.1) Método recurrente

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s = C_{s-1}(1+i) - a_1 \cdot q^{s-1}$$

b.2) Método prospectivo

$$C_s = A(a_{s+1}, q) \overline{n-s+1} i = a_{s+1} \frac{1 - q^{n-s+1}(1+i)^{-(n-s+1)}}{1+i-q}$$

$$C_s = A(a_{s+1}, q=1+i) \overline{n-s+1} i = \frac{a_1 \cdot q^s(n-s)}{1+i} = \frac{a_{s+1}(n-s)}{1+i}$$

b.3) Método retrospectivo

$$C_s = C_0(1+i)^s - S(a, q|s)i = C_0(1+i)^s - a \cdot \frac{1-q^s(1+i)^{-s}}{1+i-q}(1+i)^s$$

$$\text{si } q = 1+i;$$

$$C_s = C_0(1+i)^s - \frac{a \cdot s}{1+i}(1+i)^s$$

c) Ley de variación de las cuotas de amortización

$$A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s(1-q)$$

d) Capital total amortizado

$$M_s^E = \sum_{h=1}^s A_h = C_0 - C_s$$

Amortización con términos variables en progresión aritmética

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

$$C_0 = A(a, d|n)i$$

b) Capital vivo o saldo financiero

b.1) Método recurrente

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

b.2) Método prospectivo

$$C_s = A(a_{s+1}, d|n-s)i$$

b.3) Método retrospectivo

$$C_s = C_0(1+i)^s - S(a, d|s)i$$

c) Ley de variación de las cuotas de amortización

$$A_{s+1} = A_s(1+i) + d \cdot s \cdot i$$

d) Capital total amortizado

$$M_s^E = \sum_{h=1}^s A_h = C_0 - C_s$$

Valor financiero del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad

- Valor financiero \rightarrow valor actualizado de los n flujos de pendientes de vencimiento, utilizando i' .

$$V_s = \sum_{h=1}^n C_s \cdot h (1+i')^{-h}$$
 Nota: i' es el tipo de interés del
- Usufructo \rightarrow valor actualizado de J flujos de pago de alquiler o de renta de usufructo.

$$U_s = \sum_{h=1}^{n-s} I_s \cdot h (1+i')^{-h}$$
- Nuda propiedad \rightarrow valor actualizado de A flujos o pendientes de vencimiento.

$$N_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_s \cdot h (1+i')^{-h}$$

$$V_s = U_s + N_s$$

Para calcular el usufructo en los préstamos amortizados con tipo de interés constante i , valorados al tipo de interés i' se puede utilizar la fórmula de Achard.

$$U_s = \frac{i}{i'} (C_s - N_s)$$

- Métodos particulares de amortización

- Francés $\begin{cases} A = \text{cte} \\ i = \text{cte} \end{cases}$

$$1^\circ V_s = A \cdot a_{\overline{n-s}|i'}$$

$$2^\circ V_s = \frac{i}{i'} (C_s - N_s) + N_s \Rightarrow V_s = U_s + N_s$$

$$3^\circ U_s = \frac{i}{i'} (C_s - N_s) \quad \& \quad U_s = V_s - N_s$$

• Americano

$$1^\circ U_s = C_0 \cdot i' \cdot a_{\overline{n-s}|i'}$$

$$2^\circ N_s = C_0 (1+i')^{-(n-s)}$$

$$3^\circ V_s = U_s + N_s$$

• Italiano

$$1^\circ N_s = A \cdot a_{\overline{n-s}|i'}$$

$$2^\circ U_s = \frac{i}{i'} (C_s - N_s) = \frac{i}{i'} ((n-s)A - A \cdot a_{\overline{n-s}|i'})$$

$$3^\circ V_s = U_s + N_s$$

Tasas de rendimiento y coste

Prestamista $i_a \rightarrow$ Tipo de interés activo o tanto efectivo activo (rentabilidad prestamista)

Hace equivalente los capitales realmente entregados por el prestamista con los realmente recibidos por el mismo.

Prestatario $i_p \rightarrow$ Tipo de interés pasivo o tanto efectivo pasivo (coste de operación financiera del prestatario).

Hace equivalente los capitales realmente entregados por el prestatario con los realmente recibidos por el mismo.

TAE \rightarrow Tasa Anual Equivalente: indicativo del coste o rendimiento de la operación financiera (desde el punto de vista del cliente).